NGUYỄN TIẾN QUANG

PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI

Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG TRUNG HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. NGUYỄN TIẾN QUANG

PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI

Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC

In lần thứ 2

- Các dạng toán, phương pháp giải các bài toán điển hình và các bài luyện tập.
  Tài liệu luyện thi vào Đại học và Cao đẳng.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 2002

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc NGUYỄN VĂN THOA

Tổng biên tập NGUYỄN THIỆN GIÁP

Biên tập:

LAN HƯƠNG

TRẦN PHƯƠNG DUNG

Trình bày bìa:

NGỌC ANH

PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC

Mã số: 01. 75. ĐH2001

In 2000 cuốn, tại Công ty in Ba Đình -Bộ Công an 160 Thái Thịnh - Đống Đa -Hà Nội

Số xuất bản: 257/171/CXB. Số trích ngang 148/KH/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quí III năm 2002

LỜI NÓI ĐẦU

Sau cuốn "Lượng giác ở trường trung học" đây là cuốn thứ hai trong bộ sách mới để luyện thi vào Đại học, Cao đẳng. Cuốn sách đề cập tới hầu hết các dạng toán về tam thức bậc hai thường gặp trong các kì thi nói trên.

Đối với chương trình đại số ở trường trung học, bài toán về biện luận phương trình, bất phương trình bậc hai cùng với các bài toán khảo sát hàm số được coi là những vấn đề cơ bản nhất, chủ yếu nhất. Riêng đối với các bài toán về khảo sát hàm số, việc nghiên cứu cực trị và nghiên cứu tính đồng biến, nghịch biến là hai nội dung chính. Hai bài toán này nhờ công cụ đạo hàm được đưa về hai bài toán lớn của tam thức bậc hai là: 1) So sánh các nghiệm của tam thức bậc hai với các số và 2) Biện luận dấu của tam thức.

Bởi vậy, theo chúng tôi ngoài mục đích giúp cho thầy và trò lớp 12 chuẩn bị ôn thi vào Đại học, Cao đẳng cuốn sách này còn giúp cho thầy và trò lớp 10, lớp 11 có thể luyện tập nắm vững các dạng toán này. Điều đó làm giảm nhẹ gánh nặng cho việc ôn luyện ở lớp 12 và phù hợp với nhu cầu của đông đảo học sinh, giáo viên hiện nay.

Trong bối cảnh sách tham khảo ngày càng nhiều như hiện nay, chúng tôi cố gắng đề cập một cách bao quát những dạng toán cơ bản nhất với một số lượng tối thiểu các bài toán.

Cuốn sách được viết theo 6 bài giảng, mỗi bài chia làm hai phần: các bài toán tiêu biểu với lời giải tường minh cùng *những chỉ dẫn cần thiết, sau đó cung cấp cho các bạn những bài toán tương tự mà lời giải của chúng được xếp ở cuối cuốn sách.*

Theo ý chúng tôi, nội dung cuốn sách này là một phần cơ bản trong nội dung ôn luyện ở lớp 12. Tuy nhiên, phương án tốt hơn là triển khai nó ở cuối lớp 10 hoặc đầu lớp 11.

Sau những lần tái bản, chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến của bạn đọc hoan nghênh tính tích cực và tiện lợi của cuốn sách và đề nghị tăng thêm số lượng bài toán. Chúng tôi đã suy xét kĩ điều này và vẫn trung thành với quan điểm "cố gắng đề cập một cách bao quát những dạng toán cơ bản nhất, với số lượng tối thiểu các bài toán" phù hợp với quĩ thời gian của học sinh.

Tuy nhiên, chúng tôi cũng đã bổ sung thêm một số đề thi đại học những năm gần đây (tên trường được đặt trong dấu ngoặc). Ngoài ra còn sửa chữa những sai sót trong các lần in trước.

Xin chân thành cảm ơn ý kiến của bạn đọc.

Tác giả

TS. Nguyễn Tiến Quang

PHẦN THỨ NHẤT

CÁC DẠNG TOÁN

Bài 1

TAM THỨC BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Một phương trình bậc hai có dạng tổng quát

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0), \qquad (1)$$

còn đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ được gọi là một tam thức bậc hai .

Nghiệm. Nghiệm của phương trình (1) cũng được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai f(x). Để tính nghiệm ta dùng phép biến đổi sau

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \Delta = b^2 - 4ac$$

Từ đó suy ra:

- nếu $\Delta < 0$ phương trình (1) vô nghiệm
- nếu $\Delta = 0$ (1) có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- nếu $\Delta > 0$ có hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Chú ý (i) Nếu a và c trái dấu, $ac < 0$, thì $\Delta > 0$, do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

(ii) Nếu b là số chẵn, $b = 2b'$, thì

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}, \text{ với } \Delta' = b'^2 - ac.$$

- **Định lý Viét.** - Nếu phương trình bậc hai (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Định lý Viét có nhiều ứng dụng mà chúng ta sẽ gặp sau này. Có hai ứng dụng thường gặp là:

(i) Tính nhẩm nghiệm. Đặc biệt, nếu $a + b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{c}{a}$; còn nếu $a - b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm $x = -1$ và $x = -\frac{c}{a}$.

(ii) Nếu hai số x,y có tổng S và tích P thì chúng là nghiệm của phương trình

$$z^2 - Sz + P = 0.$$

- *Sự phân tích*

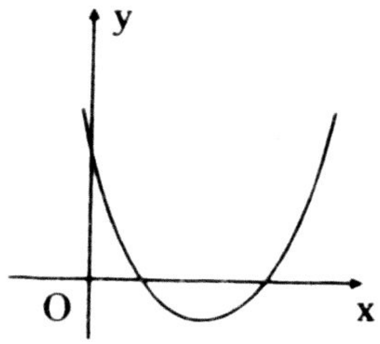
Nếu tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

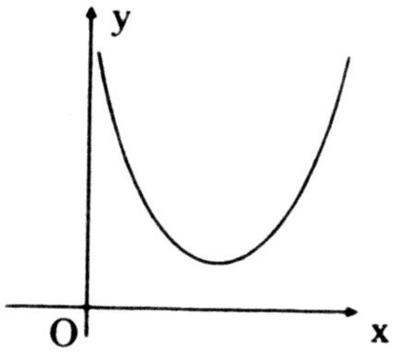
có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

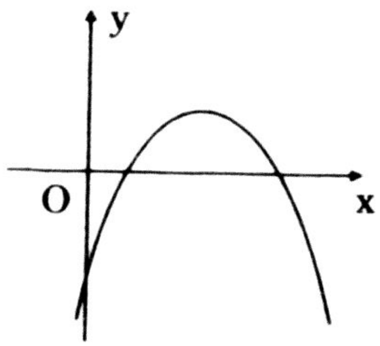
- *Đồ thị.* Đồ thị của tam thức bậc hai là một parabol có bề lõm quay lên trên nếu $a > 0$ và quay xuống dưới nếu $a < 0$. Đồ thị không cắt trục hoành Ox nếu $\Delta < 0$, tiếp xúc với Ox nếu $\Delta = 0$ và cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nếu $\Delta > 0$.



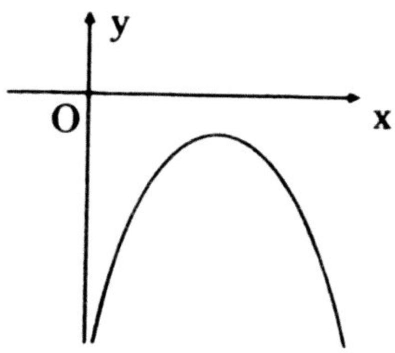
$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Tọa độ đỉnh của parabol

$$x_o = -\frac{b}{2a} \qquad y_o = -\frac{\Delta}{4a}$$

- *Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.*

Từ đồ thị suy ra rằng tam thức bậc hai f(x) có giá trị lớn nhất (tương ứng, nhỏ nhất) tại $x = -\dfrac{b}{2a}$ nếu $a < 0$ (tương ứng, $a > 0$).

VÍ DỤ

Bài toán 1.1. Giải phương trình

$$(x+1)(|x|-1) = -\frac{1}{2}$$

Giải : 1) Với $x \geq 0$ phương trình có dạng

$$(x+1)(x-1) = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Do $x \geq 0$ nên ta chỉ lấy nghiệm $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

2) Với $x < 0$ phương trình có dạng

$$(x+1)(-x-1) = -\frac{1}{2}$$

$$(x+1)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Đáp số : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 1.2. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Hãy thiết lập phương trình có các nghiệm là

$$y_1 = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2},$$

với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Giải : Do x_1, $x_2 \neq 0$ nên $c \neq 0$. Theo định lí Viet ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \ (a \neq 0).$$

Khi đó

$$S = y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$P = y_1 y_2 = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{c}$$

Từ đó y_1, y_2 là nghiệm của phương trình

$$X^2 + \frac{b}{c}X + \frac{a}{c} = 0 \text{, hay}$$

$$cX^2 + bX + a = 0 .$$

Bài toán 1.3. Với giá trị nào của a thì các nghiệm của phương trình

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

có tổng bình phương các nghiệm bằng $\frac{7}{4}$?

Giải : Để phương trình có nghiệm ta cần có $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \geq 0 \text{ với mọi a.}$$

Khi đó theo định lí Viét ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$= (3a)^2 - 2a^2 = 7a^2 = \frac{7}{4}$$

Suy ra $a = \pm\frac{1}{2}$.

Bài toán 1.4. Xác định giá trị của a để tổng bình phương các nghiệm của

$$x^2 - (2a - 1)x + 2(a - 1) = 0$$

nhỏ nhất.